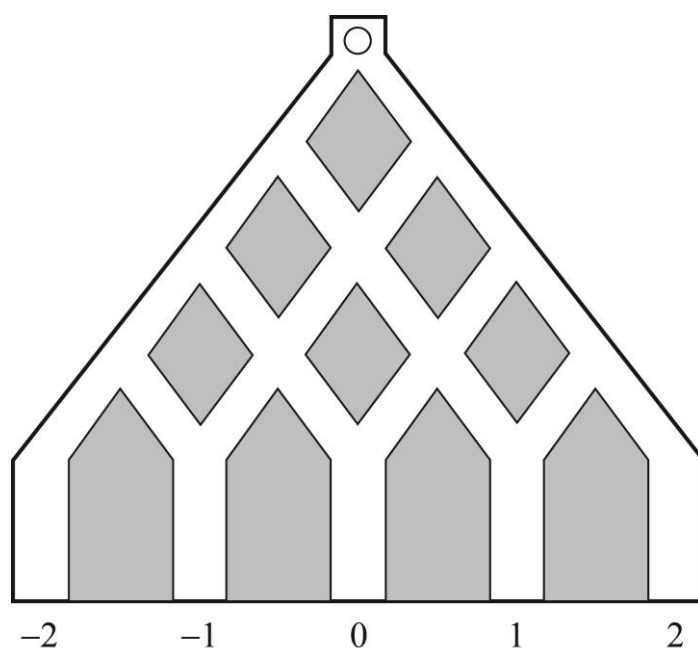


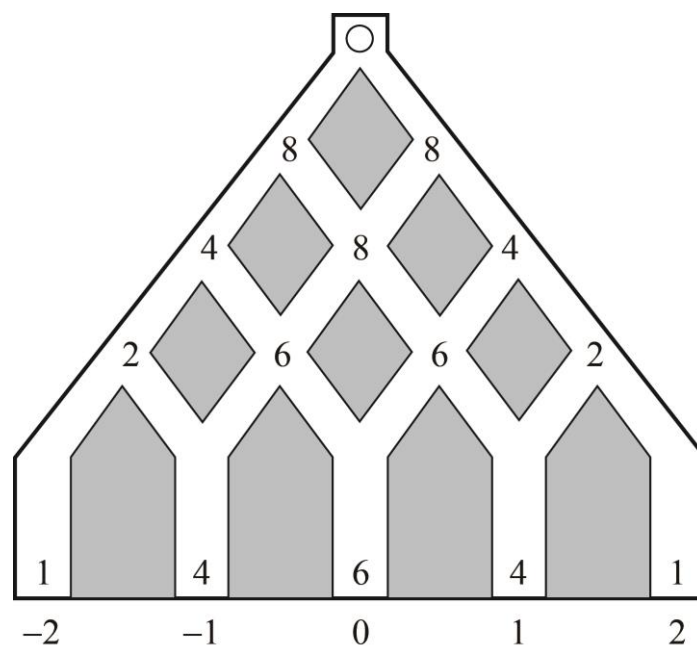
33 滾動吧！彈珠…巴斯卡的秘密

相信大家都在電腦上玩過彈珠台遊戲，這種虛擬，完全由程式控制的電玩遊戲好玩又方便。但真正玩過實體彈珠台遊戲的人可能逐漸稀少了。彈珠台的設計原理就是當彈珠滾到叉路時，因為碰到尖點的關係，所以往左或向右走的機會是一樣的。在路邊玩過彈珠台的人都會清楚，落在離中央越近砸道的彈珠最多。這樣的情形是那個數學原理導致的呢？就讓我們以下面造型的彈珠台來解釋彈珠台的數學原理：



將十六顆彈珠從頂端投入彈珠台，落在每一砸道的彈珠數目，最合理的分配為何？

如下圖所示，16顆彈珠從頂端投入彈珠台後，會有8顆往左，8顆向右，所以第一層的兩格以數字8, 8來呈現。接下來考慮第二層，左、右兩邊的8顆彈珠也是會有4顆往左，4顆向右，所以第二層的三格以數字4, 8, 4來呈現。同樣的道理，可以知道：第三層的四格數字為2, 6, 6, 2；最後一層的五格數字為1, 4, 6, 4, 1：



細心的讀者是否觀察到，數列 1, 4, 6, 4, 1 是底下二項式展開式的係數：

$$(x + y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4.$$

所以彈珠台的彈珠分佈是受到巴斯卡三角之係數的影響。下回在夜市玩彈珠台時，記得用巴斯卡三角計算一下它的分佈。

最後，談一道烏龜遊戲，大烏龜生了一堆小烏龜，為了安全起見，大烏龜鑿了如彈珠台路線的密道，小烏龜依序躲入密道裡。第一隻小烏龜走進密道後，碰到分歧路時都選擇右邊的路線，接下來的小烏龜，在碰到分歧路時都選擇與上次走過這裡的小烏龜不同路線的走法，而在沒有小烏龜走過的路口則選擇右邊的路線。例如，第 1 隻小烏龜會躲進砸道 -2 的密道，第 2 隻小烏龜會躲進砸道 -1 的密道，…。試問：第 n 隻烏龜會躲進幾號砸道的密道？